

DER PHYSIK UND CHEMIE.

BAND XXXIII.

$$\times \left(\cos \beta \sin x - \frac{\sin \beta \cos x}{\cos(\varphi - \psi)} \right) \times \\ \times \sum I_\lambda^2 \sin^2 \left\{ \frac{d}{\lambda} \frac{\sin \varphi (\sin \varphi_i - \sin \varphi_u)}{\sin \varphi_i \sin \varphi_u} \right\} \dots (6)$$

Es ist leicht hieraus der Fall herzuleiten, welchen Fresnel behandelt hat, als er die entdeckten Principien der Theorie der Farben krystallinischer Blättchen entwickelte (*Ann. de chim. T. XVII*), nämlich den Fall des senkrechten Durchgangs der Lichtwellen durch das Blättchen. Hier ist $\varphi = 0 = \varphi_i = \varphi_u = \psi$, und es wird also:

$$B^2 = \left(\frac{2}{1+\mu} \right)^2 \mu^2 \text{ und } \cos(\varphi - \psi) = 1.$$

Da die Azimuthe der Polarisationsebenen hier willkührlich werden, kann man $\alpha = 0$ setzen, und dann wird x der Winkel, welchen die Polarisationsebene des einfallenden Strahls bildet mit der Polarisationsebene einer mit dem Blättchen parallelen Wellenebene, welche die gewöhnliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit hat, und β der Winkel, welchen die Polarisationsebene des einfallenden Strahls mit derjenigen bildet, auf welche die Polarisationsebenen der austretenden Strahlen zurückgeführt werden. Man erhält:

$$A_i^2 = W^2 \mu^2 \left(\frac{2}{1+\mu} \right)^2 \left\{ \cos^2 \beta - \sin 2x \sin 2(x-\beta) \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{W^2} \sum I_\lambda^2 \sin^2 \left\{ \frac{d}{\lambda} \frac{\sin \varphi \sin(\varphi_i - \varphi_u)}{\sin \varphi_i \sin \varphi_u} \right\} \pi \right\}$$

welcher Ausdruck von dem Fresnel'schen a. a. O. sich nur dadurch unterscheidet, dass er den constanten Factor der Intensität $\mu^2 \left(\frac{2}{1+\mu} \right)^2 W^2$ enthält. Dieser Factor ist die Intensität des Lichtes, welches, wenn $\beta = 0$ ist, durch eine unkristallinische Platte, in welcher sich das Licht

mit der Geschwindigkeit μ fortpflanzt, senkrecht durchgegangen ist, oder was dasselbe ist, wenn das Krystallblättchen parallel einer der Kreisschnitte der Elasticitätsfläche ist, deren mittlere Axe $=\mu$ ist; für beide Fälle ist nämlich $\varphi_i - \varphi_u = 0$, und also:

$$A_i^2 = \mu^2 \left(\frac{2}{1+\mu} \right)^4 W^2 \cos^2 \beta.$$

Aus der allgemeinen Formel (6) ersieht man, daß das durchgehende Licht farblos ist, in folgenden vier Fällen, wodurch besondere Werthe von α und β bestimmt werden, die wir mit α_i , α_u , β_i , β_u bezeichnen wollen:

$$1) \cos \alpha_i \cos x + \frac{\sin \alpha_i \sin x}{\cos(\varphi - \psi)} = 0.$$

Dieser Fall tritt ein, wenn der einfallende Strahl in einem solchen Azimuth α_i polarisirt ist, daß durch die Brechung nur ein ungewöhnlicher Strahl entsteht, und die Intensität des gewöhnlichen Strahls $=0$ ist, wie aus dem Werthe von D_i in (3) erhellet.

$$2) \cos \alpha_u \sin x - \frac{\sin \alpha_u \cos x}{\cos(\varphi - \psi)} = 0.$$

Hier ist das Azimuth der Polarisation α_u des einfallenden Strahles ein solches, daß kein ungewöhnlicher Strahl entsteht.

$$3) \cos \beta_i \cos x + \frac{\sin \beta_i \sin x}{\cos(\varphi - \psi)} = 0.$$

In diesem Falle steht die neue Polarisationsebene mit dem Azimuth β_i senkrecht auf derjenigen Ebene, nach welcher der aus dem Blättchen ausgetretene, vom gewöhnlichen Strahl D_i erzeugte Strahl polarisirt ist, denn die Tangente des Azimuths dieser Polarisationsebene ist:

$$\frac{P_i}{S_i} = \frac{\tan x}{\cos(\varphi - \psi)}$$

$$4) \cos x \sin \beta_u - \frac{\cos x \sin \beta_u}{\cos(\varphi - \psi)} = 0.$$

Hier steht die Polarisationsebene mit dem Azimuth β_u

senkrecht auf der Polarisationsebene des durch D_u erzeugten heraustretenden Strahls senkrecht.

Man sieht, dass $\alpha_1 = \beta_1$, und $\alpha_u = \beta_u$ ist. Die Bedingung, unter welcher die beiden Azimuthe β_1 und β_u in welchem die Farben verschwinden, senkrecht gegen einander sind, ist $\tan \beta_1 \tan \beta_u + 1 = 0$, d. i.:

$$\sin^2(\varphi - \psi) = 0.$$

Diese Rechtwinklichkeit findet also nur bei senkrechtem Einfall der Strahlen statt. Biot in seinem *Traité de Physique* giebt, wo er von den Farben der Krystallblättchen bei schiefem Einfall handelt, eine empirische Regel für die Bestimmung der Azimuthe β_1 und β_u , welche diese Rechtwinklichkeit als allgemein stattfindend, wenigstens wenn das Blättchen senkrecht auf einer der Elasticitätsachsen steht, in sich schliesst, die also schon aus diesem Grunde als sich zu weit von der Wahrheit entfernd angesehen werden muss.

§. 3.

Es ist in den beiden vorhergehenden Paragraphen der Unterschied der Phase der mit einander interferirenden Strahlen, welche durch ein Krystallblättchen gegangen sind, genau, und die resultirende Intensität annäherungsweise in so allgemein gültigen Ausdrücken gefunden worden, dass sie auf jede durchsichtige Substanz angewandt werden können. Es bedarf zu diesem Zwecke nur der Berechnung der mit φ_1 , φ_u und x , bezeichneten Winkel aus der gegebenen Lage des einfallenden Strahls, in Beziehung auf die ihrer Richtung nach im Blättchen gegebenen Elasticitätsachsen. Der Weg, diese Rechnung auszuführen, soll auch gezeigt werden.

Eine Wellenebene bewege sich mit der Geschwindigkeit V in einem unkristallinischen Medio, und falle unter dem Winkel φ auf die ebene Oberfläche I eines Krystall-Mediums. Sie erzeugt im Innern des Mediums zwei Wellenebenen, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeiten

ten μ_i und μ_u . Diese Wellenebenen μ_i und μ_u schneiden die brechende Ebene I in derselben Linie, in welcher sie von den einfallenden Wellenebenen geschnitten wird. Die Neigungen der beiden Wellenebenen μ_i und μ_u gegen I seyen φ_i und φ_u ; diese beiden Winkel werden durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\mu' \sin \varphi = V \sin \varphi_i, \quad \mu'' \sin \varphi = V \sin \varphi_u \dots (1)$$

Es seyen a, b, c die Werthe der kleinsten, mittleren und größten Elasticitätsaxe, und m, n, p seyen die Cosinusse der Winkel, welche die Normale von der Wellenebene V mit diesen Axen bildet; es seyen ferner $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ und $\alpha_u, \beta_u, \gamma_u$ die Cosinusse der Winkel, welche die Normalen der Wellenebenen μ_i und μ_u mit ihnen bilden. Die Normale der brechenden Fläche habe zu Cosinussen ihrer Neigungen gegen dieselben Axen A, B, C . Man kann $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ und $\alpha_u, \beta_u, \gamma_u$ ausdrücken durch m, n, p, A, B, C und φ_i und φ_u ; man hat aus (4) §. 1 unmittelbar:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= A \cos \varphi_i - \sin \varphi_i \left\{ \frac{A \cos \varphi - m}{\sin \varphi} \right\} \\ \beta_i &= B \cos \varphi_i - \sin \varphi_i \left\{ \frac{B \cos \varphi - n}{\sin \varphi} \right\} \dots \dots \dots (2) \\ \gamma_i &= C \cos \varphi_i - \sin \varphi_i \left\{ \frac{C \cos \varphi - p}{\sin \varphi} \right\} \end{aligned}$$

und erhält $\alpha_u, \beta_u, \gamma_u$, wenn φ_i vertauscht wird mit φ_u .

Die Geschwindigkeit μ_i ist eine Wurzel folgender Gleichung:

$$\frac{\alpha_i^2}{\mu_i^2 - a^2} + \frac{\beta_i^2}{\mu_i^2 - b^2} + \frac{\gamma_i^2}{\mu_i^2 - c^2} = 0 \dots (3)$$

Setzt man statt $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ihre Werthe aus (2) und statt μ_i sein Werth aus (1), so enthält diese Gleichung nur noch eine Unbekannte, nämlich φ_i , und dies ist eine Wurzel der resultirenden Gleichung; eine andere Wurzel derselben Gleichung ist φ_u , und außerdem hat sie noch zwei Wurzeln, welche negativ sind, und denjenigen Wellenebenen im Innern des Krystall-Mediums angehören, welche entstehen würden, wenn die Wellen-

ebenen μ , und μ_u auf eine zweite mit I parallele Gränze ebene des Mediums träfen, und hier nach dem Innern zurück reflectirt werden. Die resultirende Gleichung ist vom vierten Grade, und lässt sich nur in gewissen besonderen Fällen auf Gleichungen des zweiten Grades zurückführen; man kann also ihre Wurzeln nur durch Annäherungen berechnen. Da die Form aber, in welcher sie durch die angegebenen Substitutionen erscheint, hiezu nicht bequem ist, werde ich sie nicht herschreiben, sondern ihr eine andere Gestalt geben, welche dadurch entsteht, dass man die durch α , β , γ , und α_u , β_u , γ_u bezeichneten Richtungen durch ihre Neigungen gegen die optischen Axen bestimmt.

Die Normale irgend einer Wellenebene sey durch die Cosinusse α , β , γ bestimmt, und die ihr angehörenden beiderlei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten durch (μ) , und $(\mu)_u$, so sind diels die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\frac{\alpha^2}{\mu^2 - a^2} + \frac{\beta^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{\gamma^2}{\mu^2 - c^2} = 0.$$

Entwickelt man diese Gleichung nach den Potenzen von μ^2 :

$$\begin{aligned} \mu^4 - \mu^2 [a^2 + b^2 + c^2 - (a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 + c^2 \gamma^2)] \\ + a^2 b^2 c^2 + \beta^2 a^2 c^2 + \gamma^2 a^2 b^2 = 0 \end{aligned}$$

so hat man:

$$(\mu)_i^2 + (\mu)_u^2 = a^2 + b^2 + c^2 - (a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 + c^2 \gamma^2) \dots (4)$$

und nach einigen Reductionen findet man:

$$(\mu)_i^2 - (\mu)_u^2 = \sqrt{\{[\alpha^2(c^2 - b^2) + \beta^2(c^2 - a^2) + \gamma^2(b^2 - a^2)]^2 - 4\alpha^2\gamma^2(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)\}} \dots (5)$$

Die Werthe $(\mu)_i^2 + (\mu)_u^2$ und $(\mu)_i^2 - (\mu)_u^2$ können auf eine einfache Weise ausgedrückt werden durch die Winkel u und v , welche die durch α , β , γ bestimmte Richtung mit den optischen Axen bildet. Die Cosinusse der Winkel, welche die optischen Axen mit den drei Elasticitätsachsen a , b , c bilden, sind nämlich:

$$\pm \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}}, 0, \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}}$$

und man hat also:

$$\cos u = \frac{\alpha \sqrt{b^2 - a^2} + \gamma \sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{c^2 - a^2}} \quad \dots (6)$$

$$\cos v = \frac{-\alpha \sqrt{b^2 - a^2} + \gamma \sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{c^2 - a^2}}$$

Wenn man diese beiden Cosinusse mit einander multipliziert, so erhält man hieraus:

$$(c^2 - a^2) \cos u \cos v = -b^2 + a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 + c^2 \gamma^2,$$

und addirt man diese Gleichung zu (4), so findet sich:

$$(\mu)_i^2 + (\mu)_u^2 = a^2 + c^2 - (c^2 - a^2) \cos u \cos v \dots (7)$$

Aus (6) zieht man:

$$\sqrt{c^2 - a^2} \sin u = \sqrt{\{ \alpha^2 (c^2 - b^2) + \beta^2 (c^2 - a^2) \\ + \gamma^2 (b^2 - a^2) - 2 \alpha \gamma \sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \}}$$

$$\sqrt{c^2 - a^2} \sin v = \sqrt{\{ \alpha^2 (c^2 - b^2) + \beta^2 (c^2 - a^2) \\ + \gamma^2 (b^2 - a^2) + 2 \alpha \gamma \sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \}}$$

Multiplicirt man diese beiden Ausdrücke mit einander und vergleicht das Product mit (5), so findet man:

$$(\mu)_u^2 - (\mu)_i^2 = (c^2 - a^2) \sin u \sin v \dots (8)$$

Aus (7) und (8) erhält man:

$$(\mu)_i^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{c^2 - a^2}{2} \cos(u - v) \dots \dots (9)$$

$$(\mu)_u^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{c^2 - a^2}{2} \cos(u + v)$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Wellenebenen besitzen also in Beziehung auf die optischen Axen ein ganz ähnliches Gesetz, wie die umgekehrten Geschwindigkeiten der Strahlen in Beziehung auf die Strahlenachsen¹).

Wenden wir dies Resultat auf die Gleichung (1) an. Wir nennen u' , v' die Winkel, welche die Normale der unter φ , gegen die brechende Fläche I geneigten Wellenebene mit den optischen Axen bildet, und u'' ,

1) Wenn U und V diejenigen Winkel sind, welche ein Strahl mit den Strahlenachsen bildet, und G seine Fortpflanzungsgeschwindigkeit, so ist bekanntlich:

$$\frac{1}{G^2} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right) \cos(U \pm V).$$

φ'' diejenigen, welche diese Axen mit der Normale der unter φ_u geneigten Wellenebene. Alsdann verwandeln sich jene Gleichungen (1) in folgende:

$$\begin{aligned} V^2 \sin^2 \varphi_i &= \sin^2 \varphi \left\{ \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{c^2 - a^2}{2} \cos(u' - \varphi') \right\} \\ V^2 \sin^2 \varphi_u &= \sin^2 \varphi \left\{ \frac{a^2 + c'^2}{2} - \frac{c^2 - a^2}{2} \cos(u'' + \varphi'') \right\} \end{aligned} \quad \dots (10)$$

Die Winkel u' , φ' hängen ab von der Lage der brechenden Fläche, von der Lage der Linie, in welcher sie sich mit der einfallenden Wellenebene schneidet, und von dem Winkel φ_i ; es sind also bekannte Functionen dieses Winkels φ_i ; und u_u , φ_u sind dieselben Functionen von φ_u . Aus (10) lassen sich also diese beiden Winkel bestimmen.

Die Normale der brechenden Fläche bilde mit den optischen Axen die Winkel P , Q . Das Azimuth des einfallenden Strahls, d. h. der Winkel, welchen die Einfallsebene mit einer durch die Normale von I gelegten festen Ebene bildet, sey ω ; diese feste Ebene sey so gelegt, dass sie den Winkel $2k$ halbirt, welcher von den zwei Ebenen eingeschlossen ist, die durch die Normale von I und die beiden optischen Axen gelegt ist, und zwar so, dass sie zwischen den beiden Axen durchgeht, da wo diese den spitzeren Winkel einschliessen. Es seyen, Fig. 5 Taf. I, O und O' die Durchschnittspunkte einer um den Mittelpunkt C der Elasticitätsfläche beschriebenen Kugel mit den optischen Axen, I der Durchschnitt dieser Kugel mit der Normale der brechenden Fläche, E der Durchschnitt mit dem einfallenden Strahl, μ , mit der Normale der Wellenebene μ . Die Bogen IO , IO' und $\mu'O$, $\mu'O'$ entsprechen den Winkeln P , Q und u_i , φ_i ; der Bogen IH halbirt den Winkel $OIO' = 2K$ und HIE ist das Azimuth des einfallenden Strahls, $= \omega$. Der Bogen IE entspricht dem Winkel φ , und $I\mu'$ dem Winkel φ_r . Für die Bogen u' und

v' haben wir als Seiten in den Dreiecken $OI\mu'$ und $O'I\mu'$:

$$\begin{aligned}\cos u' &= \cos P \cos \varphi_i + \sin P \sin \varphi_i \cos(\omega+k) \\ \cos v' &= \cos Q \cos \varphi_i + \sin Q \sin \varphi_i \cos(\omega-k)\end{aligned}\dots \quad (11)$$

Dieselben Ausdrücke verwandeln sich in die Werthe von $\cos u''$ und $\cos v''$, wenn φ_i vertauscht wird mit φ_u . Die Gleichungen (10) und (11) combinirt, bestimmen die gesuchten Winkel φ_i und φ_u , und sind sehr geeignet, dieselben durch Näherungen zu berechnen, welche Näherungen auf der Kleinheit der Grösse $\frac{1}{2}(a-c)$ beruhen. Genügt es nur die erste Potenz von dieser Grösse zu berücksichtigen, so kann man in (11) statt $\sin \varphi_i$

setzen $\frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{a+c}{2}} \sin \varphi$, und die hieraus sich ergeben-

den Werthe für $\cos u'$ und $\cos v'$, welche ich mit $\cos u$ und $\cos v$ bezeichne, in (10) substituirt, geben $\sin \varphi_i$ und $\sin \varphi_u$ richtig bis zur zweiten Potenz von $\frac{1}{2}(c^2 - a^2)$. Diese Werthe von φ_i und φ_u in (11) von Neuem gesetzt, die daraus hervorgehenden Werthe für u' , v' und u'' , v'' in (10) substituirt, geben eine neue Annäherung

für φ_i und φ_u , die bis auf die dritte Potenz von $\frac{c^2 - a^2}{2}$

richtig ist. Weiter wird es selten nöthig seyn die Annäherungen zu treiben. Für den bis auf die erste Potenz von $\frac{c^2 - a^2}{2}$ angenäherten Werth hat man also, wenn $V=1$ gesetzt wird:

$$\left. \begin{aligned}\cos u &= \cos P \sqrt{1 - \frac{a^2 + c^2}{2} \sin^2 \varphi} \\ &\quad + \sin P \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2} \sin \varphi \cos(\omega+k)} \\ \cos v &= \cos Q \sqrt{1 - \frac{a^2 + c^2}{2} \sin^2 \varphi} \\ &\quad + \sin Q \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2} \sin \varphi \cos(\omega-k)}\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}\sin^2 \varphi_i &= \sin^2 \varphi \left\{ \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{c^2 - a^2}{2} \cos(u - v) \right\} \\ \sin^2 \varphi_u &= \sin^2 \varphi \left\{ \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{c^2 - a^2}{2} \cos(u + v) \right\}\end{aligned}\quad (13)$$

Zieht man die letztere Gleichung in (13) von der ersten ab, so erhält man:

$$\sin(\varphi_i - \varphi_u) = \frac{(c^2 - a^2) \sin^2 \varphi \sin u \sin v}{\sin(\varphi_i + \varphi_u)},$$

worin man, da dieser Ausdruck nur bis auf die erste Potenz von $c^2 - a^2$ richtig ist, statt $\sin(\varphi_i + \varphi_u)$ setzen muss:

$$2 \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{a^2 + c^2}{2}} \cdot \sin^2 \varphi,$$

so dass also:

$$\sin(\varphi_i - \varphi_u) = \frac{c^2 - a^2}{2} \frac{\sin \varphi \sin u \sin v}{\sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2 + c^2}{2} \sin^2 \varphi}}$$

Setzt man diesen Ausdruck in den Werth von U , §. 1 (9), und zugleich statt $\sin \varphi, \sin \varphi_u$ den angenäherten Werth $\frac{a^2 + c^2}{2} \sin^2 \varphi$, so erhält man als erste Annäherung für das Gesetz der Farben in zweiaxigen Krystallen:

$$U = \frac{d}{\lambda} \cdot \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2} \cdot \frac{\sin u \sin v}{\sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2 + c^2}{2} \sin^2 \varphi}}.$$

Berichtigung. S. 270 Z. 19 muss es statt $x' + x'' = 90^\circ$ heißen: $x_i + x_u = 90^\circ$, und auf S. 271 bis 274 überall x_i statt x .

XXIX. Erklärung der isochromatischen Farben, welche einaxige parallel mit der Axe geschnittene Krystalle in homogenem polarisirten Lichte zeigen; vom Dr. Johann Müller in Darmstadt.

Die Grundsätze der Vibrationstheorie sind in dem Folgenden als bekannt vorausgesetzt; um sie gründlich kennen zu lernen, ist nichts mehr zu empfehlen, als Fresnel's Schriften über diesen Gegenstand zu studiren ¹). Der englische Physiker Airy hat, gestützt auf eben diese Grundsätze, die Erscheinungen, welche einaxige senkrecht auf die Axe geschnittene Krystalle im polarisirten Lichte zeigen, berechnet, und auch die Erscheinung erklärt, welche dadurch hervorgebracht wird, dass man ein sogenanntes Fresnel'sches Glasparallelopiped mit einem solchen Krystalle verbindet ²). Auch die eigenthümlichen

- 1) Besonders in der Abhandlung über die Doppelbrechung in diesen Annalen, Bd. XXIII S. 372 und 494, und die über die Diffraction, Annal. Bd. XXX S. 100.
- 2) Bringt man zwischen zwei gekreuzte Turmalinplatten einen einaxigen senkrecht auf die Axe geschnittenen Krystall und ein Fresnel'sches Glasparallelopiped, dessen Reflexionsebene einen Winkel von 45° mit den Polarisationsebenen der Turmaline macht (es ist einerlei, ob vor oder hinter dem Krystall), so wird man die Erscheinung sehen, welche Airy in seiner Abhandlung (übersetzt in Poggendorff's Annalen, Bd. XXIII S. 211 und 226) beschrieben und erklärt hat. Es ist zu verwundern, dass er nicht seine Rechnung auch auf den Fall ausgedehnt hat, dass zwei solcher Parallellopipede mit dem Krystall combiniert werden. Bringt man nämlich vor und hinter dem Krystall ein solches Parallellopiped in die eben erwähnte Lage, so sieht man sehr schöne, vollkommen ununterbrochene runde Ringe, und in der Mitte nach Umständen einen hellen oder dunklen Fleck. (Vergl. Ann. XXVI S. 143.) Ich habe diesen Fall berechnet, und ebenfalls ein vollkommen genügendes Resultat gefunden.

Erscheinungen der sogenannten Circularpolarisation in Quarzplatten hat er mit Hülfe einiger von ihm selbst aufgestellten Hypothesen über Circularvibrationen im Quarz berechnet, und seine Resultate zeigen eine überraschende Uebereinstimmung mit der Erfahrung.

In dem Folgenden will ich nun versuchen, nach Fresnel's Principien die Curven zu berechnen, welche man in einaxigen *parallel* mit der Axe geschnittenen Krystallen beobachtet, wenn man sie zwischen zwei Turmalinplatten bringt und nach einem homogenen Lichte sieht.

21

Entwicklung eines allgemeinen Ausdrucks für die Intensität eines Lichtstrahls, welcher durch zwei Turmalinplatten und eine dazwischen liegende Platte eines doppelt brechenden Krystals gegangen ist.

Trifft ein polarisirter Strahl, dessen Richtung in c , Fig. 6 Taf. I, und dessen Schwingungsebene in acb projicirt seyn mag, eine doppeltbrechende Krystallplatte, so theilt er sich in zwei ebenfalls polarisierte Strahlen, deren Schwingungsebenen, die in gcd und ecf projicirt seyn mögen, einen rechten Winkel mit einander machen. Nehmen wir nun an, dass der Hauptschnitt des Krystals für den einfallenden Strahl in gcd projicirt sey, so ist derjenige der beiden Strahlen, dessen Schwingungsebene ecf ist, der ordentliche, der andere hingegen der außerordentliche Strahl¹⁾.

Ist J die absolute Geschwindigkeit der Vibrationen des ursprünglichen Strahls, d. h. die Geschwindigkeit, mit welcher ein schwingendes Aethermolecöl des einfallenden Strahls durch die Lage des Gleichgewichts geht, so ist $J \cos \nu$ die absolute Geschwindigkeit der Vibrationen im außerordentlichen, $J \sin \nu$ die absolute Geschwindigkeit derselben im ordentlichen Strahl, wenn ν den Winkel

1) Bekanntlich macht die Schwingungsebene eines polarisierten Strahls mit seiner Polarisationsebene einen rechten Winkel.

gcb bezeichnet, welchen der Hauptchnitt mit der Schwingungsebene des einfallenden Strahls macht.

Es sey, Fig. 7 Taf. I, *ABCD* der Durchschnitt der Krystallplatte mit der Einfallsebene des Strahls *ab*, der sich durch die doppelte Brechung in die Strahlen *bc* und *bd* theilt¹⁾), so werden diese nach *ce* und *df*, parallel mit *ab* austreten, vorausgesetzt, dass die Austrittsfläche *CD* parallel mit der Eintrittsfläche *AB* ist. Lassen wir nun aber umgekehrt zwei parallele in einer Ebene schwingende Strahlen in eben diesen Richtungen *ec* und *fd* an der Fläche *CD* eintreten, so ist klar, dass jeder in zwei Strahlen gebrochen wird, und zwar so, dass in *b* ein ordentlicher und ein außerordentlicher Strahl zusammentreffen, welche ursprünglich verschiedenen Strahlen angehörten, nun aber nach einer und derselben Richtung *ba* austreten. Die beiden in *b* zusammentreffenden Strahlen haben aber im Krystall verschiedene Wege zurückgelegt, und die Wellenlängen sind auf beiden Wegen auch ungleich; folglich liegen zwischen dem gemeinschaftlichen Ursprung beider Strahlen und dem Punkte *b* auf dem Wege des ordentlichen Strahls eine bestimmte Anzahl (ϑ) Wellenlängen mehr oder weniger, als auf dem Wege des außerordentlichen.

Bezeichnen wir durch ~

$$J \cos \nu \sin 2\pi g$$

die Geschwindigkeit, mit welcher ein in *b* gelegenes Aethermolecül zu einer bestimmten Zeit durch den außerordentlichen Strahl afficirt wird, so ist:

$$J \sin \nu \sin 2\pi(g \pm \vartheta)$$

die Geschwindigkeit, welche ihm gleichzeitig der ordentliche Strahl mittheilt.

Obgleich nun diese Strahlen von *b* an nach derselben Richtung *ba* gehen, so können sie doch nicht inter-

1) Im Allgemeinen liegt nur der ordentliche Strahl mit dem Einfallsothe und dem einfallenden Strahl in einer Ebene.

feriren, weil ihre Schwingungsebenen einen rechten Winkel mit einander machen.

Zerlegen wir aber die Vibrations der austretenden Strahlen durch eine Turmalinplatte, deren Schwingungsebene *lch*, Fig. 6 Taf. I, seyn mag, welche einen Winkel ν' mit dem Hauptschnitt des Krystals macht, so können nun die beiden Strahlen interferiren. Wenn die Geschwindigkeit, welche der außerordentliche Strahl einem in der Richtung *ba* liegenden Molekül zu irgend einer Zeit mittheilt, reducirt auf die Schwingungsebene des zweiten Turmalins

$$J \cos \nu \cos \nu' \sin 2\pi g$$

ist, so ist die durch den ordentlichen Strahl in derselben Ebene dem Molekül gleichzeitig mitgetheilte Geschwindigkeit:

$$J \sin \nu \sin \nu' \sin 2\pi(g \pm \vartheta).$$

Die Geschwindigkeit, mit welcher das Molekül nun wirklich afficirt seyn wird, ist demnach:

$J[\cos \nu \cos \nu' + \sin \nu \sin \nu' \sin 2\pi g(g \pm \vartheta)] \dots (1)$
wenn die Schwingungsebene des zweiten Turmalins innerhalb des Winkels *gce* fällt, hingegen:

$J[\cos \nu \cos \nu' \sin 2\pi g - \sin \nu \sin \nu' \sin 2\pi(g \pm \vartheta)]$
oder, was dasselbe ist:

$J[\cos \nu \cos \nu' \sin 2\pi g + \sin \nu \sin \nu' \sin 2\pi(g + \vartheta + \frac{1}{2})] \dots (2)$
wenn sie innerhalb des Winkels *gcf* fällt. Es ist zu bemerken, dass man in (1) nur $\vartheta + \frac{1}{2}$ für ϑ zu setzen braucht, um (2) zu erhalten.

Der Ausdruck bei (1) lässt sich verwandeln in:
 $J[(\cos \nu \cos \nu' + \sin \nu \sin \nu' \cos 2\pi \vartheta) \sin 2\pi g$

$$+ \sin \nu \sin \nu' \sin 2\pi \vartheta \cos 2\pi g],$$

woraus sich für die Intensität *S* des resultirenden Strahls ergiebt:

$$S = J^2 [(\cos \nu \cos \nu' + \sin \nu \sin \nu' \cos 2\pi \vartheta)^2 + \sin \nu^2 \sin \nu'^2 \sin 2\pi \vartheta^2],$$

oder:

$$S = J^2 [\cos(\nu - \nu')^2 - \frac{1}{2} \sin 2\nu \sin 2\nu' (1 + \cos 2\pi \vartheta)] \dots (3)$$

Diese Formel giebt uns allgemein die Intensität eines jeden Lichtstrahls, welcher durch zwei Turmaline und eine zwischen beiden liegende doppelt brechende Krystallplatte gegangen ist, wenn wir nur ν , ν' und ϑ gehörig bestimmen. ν und ν' sind immer unmittelbar gegeben, ϑ aber hängt von der Natur des doppeltbrechenden Krystals, von der Richtung seiner Oberflächen gegen die Axen der doppelten Brechung und von der Richtung des einfallenden Strahls ab, und erst wenn dies alles bestimmt ist, kann man ϑ berechnen. Wir wollen jetzt zur Bestimmung von ϑ für den Fall übergehen, dass der zu betrachtende Krystall nur Eine optische Axe hat, und dass er parallel mit dieser Axe geschnitten ist.

Berechnung von ϑ für einaxige parallel mit der Axe geschnittene Krystalle.

Das Umdrehungsellipsoid, dessen Gleichung ist:

$$A^2 x^2 + B^2 y^2 + A^2 z^2 = A^2 B^2 \dots \dots (4)$$

stellt nach Fresnel's Theorie die Wellenoberfläche des außerordentlichen Strahls in einem einaxigen Krystall dar, dessen optische Axe mit der Axe der y zusammenfällt. Vermittelst dieser Wellenoberfläche lässt sich nun nach der bekannten, schon von Huyghens angegebenen Construction die Richtung des außerordentlichen Strahls nach der Brechung bestimmen, wenn die Neigung der brechenden Oberfläche gegen die optische Axe und die Richtung des einfallenden Strahls bekannt ist. Die Gleichung der mit der Axe parallelen Oberfläche sey:

$$z=0.$$

Wenn die Linie, in welcher der einfallende Strahl auf den Krystall trifft, einen Winkel i mit der Axe der z , und ihre Projection auf die Ebene, die xy einen Winkel α mit der Axe der x macht, so sind ihre Gleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} y = \tan \alpha \cdot x \\ z = \frac{\cot \angle i}{\cos \alpha} \cdot x \end{array} \right\}$$

Um nun die Richtung des Strahls nach der Brechung zu construiren, muss man mit der Richtung des Strahls, welche durch ab , Fig. 8 Taf. I, dargestellt werden mag, während AB den Durchschnitt der Ebene der xy mit der Ebene der Figur bezeichnet, eine andere cd parallel ziehen, und zwar so, dass wenn man von b ein Perpendikel auf sie fällt, der Fußpunkt e desselben um die Länge einer Welle in der Luft von d entfernt ist. Setzen wir

die Wellenlänge gleich 1, so ist $ed=1$, $bd=\frac{1}{\sin i}$.

Durch den Punkt d nun hat man eine Linie so zu legen, dass sie in der Ebene der xy liegt und senkrecht auf cd steht. Man findet leicht, dass die Gleichungen dieser Linie:

$$\left. \begin{array}{l} z=0 \\ y+\cot \alpha \cdot x=\frac{1}{\sin \alpha \cdot \sin i} \end{array} \right\} \dots \dots (5)$$

sind. Legt man nun durch diese Linie eine Berührungs ebene an das Ellipsoid, so giebt bekanntlich der von dem Mittelpunkt desselben nach dem Berührungs punkt gezogene Radius vector die Richtung des gebrochenen Strahls an, die Länge desselben aber die Wellenlänge eines in dieser Richtung durch den Krystall gehenden Strahls.

Die Gleichungen einer durch den Punkt

$$z=0, x=0, y=\frac{1}{\sin i \sin \alpha}$$

der Linie bei (5) gehenden Ebene ist:

$$z+\gamma x+\beta\left(y-\frac{1}{\sin i \sin \alpha}\right)=0 \dots \dots (6)$$

Soll diese Ebene das Ellipsoid berühren, so muss der erste Differentialquotient von z in Beziehung auf x aus (4) gleich dem entsprechenden Differentialquotienten aus (6) seyn. Dasselbe muss auch für die in Beziehung auf

y genommenen Differentialquotienten von z stattfinden.

Gleichung (4) giebt:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{B^2 y}{A^2 x}$$

Gleichung (6) giebt:

$$\frac{dz}{dx} = -\gamma, \quad \frac{dz}{dy} = -\beta,$$

es muss also nach obiger Bedingung:

$$\gamma = \frac{x}{z}$$

$$\beta = \frac{B^2 y}{A^2 z}$$

seyn. Substituirt man nun diese Werthe in (6), multiplizirt alsdann die ganze Gleichung mit $A^2 z$ und zieht die Gleichung (4) von ihr ab, so bleibt:

$$\frac{y}{\sin \alpha \sin i} = A^2$$

oder:

$$y = A^2 \sin i \sin \alpha \dots \dots \dots \quad (7)$$

Dies ist die Gleichung einer Ebene, welche die Berührungspunkte des Ellipsoids mit sämtlichen durch den erwähnten Punkt an dasselbe gelegten Berührungsgebenen enthält. Die Gleichung einer Ebene, welche auf dieselbe

Weise dem Punkte $z=0, y=0, x=\frac{1}{\sin i \cos \alpha}$ der Linie bei (6) entspricht, ist:

$$x = B^2 \sin i \cos \alpha \dots \dots \dots \quad (8)$$

Eine durch die Linie bei (5) an das Ellipsoid gelegte Berührungsfläche muss aber das Ellipsoid in einem Punkte berühren, welcher den Ebenen (7) und (8) gemeinschaftlich ist; durch Combination der Gleichungen (4), (7) und (8) müssen sich also die Coordinaten des Berührungspunktes bestimmen lassen. Die Gleichungen (7) und (8) geben unmittelbar die Werthe von x und y ; substituirt man sie in (4) und bringt z auf eine Seite, so kommt

n.
-
at
)
-
n
e
-
;
;